УДК 517.984

Самоподобные функции в пространстве $L_2[0,1]$ и задача Штурма-Лиувилля с сингулярным индефинитным весом

А. А. Владимиров, И. А. Шейпак

Аннотация. В статье изучается вопрос об асимптотике спектра граничной задачи

$$-y'' - \lambda\rho y = 0,$$
$$y(0) = y(1) = 0,$$

где ρ есть функция из пространства $\overset{\circ}{W}{}_2^{-1}[0,1]$, имеющая арифметически самоподобную первообразную. При этом требование знакоопределённости на вес ρ не накладывается. Полученные теоретические результаты иллюстрируются данными численных расчётов.

1. Введение

Рассмотрим граничную задачу

$$-y'' - \lambda\rho y = 0, \tag{1.1}$$

$$y(0) = y(1) = 0. \tag{1.2}$$

Хорошо известно, что если вес ρ принадлежит пространству $C[0,1]$ и положителен, то граничная задача (1.1), (1.2) эквивалентна спектральной задаче для некоторого неограниченного самосопряжённого оператора в гильбертовом пространстве $L_2([0,1];\ \rho)$. Также известно, что если вес $\rho \in C[0,1]$ не является знакоопределённым, то задача (1.1), (1.2) эквивалентна спектральной задаче для неограниченного самосопряжённого оператора в пространстве Крейна (см. [**1**]).

Ситуация, когда вес ρ представляет собой сингулярную обобщённую функцию, изучена существенно хуже. Более того, в настоящее время для такой задачи нет даже канонической операторной модели. В известных авторам работах по указанной проблематике [**2**] и [**3**] предложены две различные (хотя и оказывающиеся эквивалентными) интерпретации задачи (1.1), (1.2) с сингулярным весом ρ, притом только для случая, когда ρ неотрицателен (то есть представляет собой меру). Случай, когда весовая функция не является знакоопределённой, видимо, не исследовался вовсе.

Между тем, разрабатываемая в настоящее время теория операторов Штурма–Лиувилля с сингулярными потенциалами (см., например, [**4**]) позволяет естественным образом связывать с задачей (1.1), (1.2) линейный пучок ограниченных операторов в том весьма общем случае, когда ρ есть произвольный элемент пространства $\overset{\circ}{W}{}_2^{-1}[0,1]$ (подробности см. в параграфе 4). Такой пучок может быть построен даже тогда, когда вместо $-y''$ в левой части равенства (1.1) стоит произвольное полуограниченное дифференциальное выражение второго порядка (хотя в настоящей работе мы и ограничиваемся рассмотрением выражения $-y''$). Для исследования спектра такого пучка

Работа поддержана РФФИ, грант №04-01-00712, и фондом поддержки ведущих научных школ, грант НШ-1927.2003.1.

оказывается возможным привлечение вариационной техники из работы [**5**] (см. далее теорему 4.1). Поэтому принципиальных трудностей рассмотрение задачи (1.1), (1.2) с весовой функцией $\rho \in \overset{\circ}{W}{}_2^{-1}[0,1]$ на самом деле не представляет.

Гораздо серьёзнее оказываются трудности технические. В отличие от регулярного случая $\rho \in C[0,1]$, в общем случае $\rho \in \overset{\circ}{W}{}_2^{-1}[0,1]$ даже порядок асимптотики спектра задачи (1.1), (1.2) зависит от выбора весовой функции (см., например, [**3**]). Поэтому для установления таких асимптотик необходимо привлекать дополнительную информацию о структуре весовой функции ρ. Мы будем предполагать, что ρ представляет собой обобщённую производную *самоподобной* квадратично суммируемой функции — порядок асимптотики будет тогда определяться параметрами самоподобия. Таким образом, некоторые результаты настоящей статьи можно рассматривать как обобщения утверждений из работы [**3**] на более широкий класс весовых функций.

В работе [**3**] для вывода спектральных асимптотик была использована теория восстановления. В настоящей статье будет применена эта же техника в её несколько расширенном варианте (при исследовании некоторых индефинитных задач вместо обычного уравнения восстановления возникает его „двумерный“ аналог).

Заслуживает упоминания следующее отличие индефинитного случая от дефинитного. Для задачи со знакоопределённым весом известна асимптотическая оценка

$$\frac{1}{\lambda_n} = O\left(\frac{1}{n^2}\right) \qquad \text{при } n \to \infty \tag{1.3}$$

(см. [**2**, (11.7)], [**3**, (3)]). Известен также ряд результатов (см. ссылки в [**3**]), уточняющих эту оценку в зависимости от наличия у обобщённой первообразной веса ρ ненулевой абсолютно непрерывной составляющей. Для индефинитного случая соответствующая проблематика теряет смысл, так как оценка (1.3) опровергается на примерах. Действительно, оценка (1.3) имеет место для тех и только тех весовых функций, у которых спектральный порядок обобщённой первообразной (см. параграф 3) не превосходит 1. Однако для произвольной (немонотонной) самоподобной функции из пространства $L_2[0,1]$ спектральным порядком может быть любое число, меньшее чем 2 (см. лемму 3.2 и утверждение 5.1).

Структура статьи такова. В параграфе 2 даётся доказательство одного частного случая теоремы восстановления и её двумерного аналога. При этом используется модификация метода из работы [**6**]. В параграфе 3 очерчиваются контуры теории самоподобных функций в пространстве $L_2[0,1]$. В параграфе 4 исследуются спектральные свойства отвечающего задаче (1.1), (1.2) операторного пучка. Для случая, когда весовая функция ρ оказывается обобщённой производной арифметически самоподобной функции положительного спектрального порядка, выписываются асимптотики спектра (случай неарифметического самоподобия будет разобран в следующей статье). Наконец, в параграфе 5 полученные результаты иллюстрируются на примерах, в том числе приводятся данные численных расчётов.

2. Теоремы восстановления

Введём в рассмотрение банаховы пространства $\ell_{1,r}$, где $r \in \mathbb{R}^+$, элементами которых являются последовательности $\theta = \{\theta_k\}_{k=0}^{\infty}$, ограниченные по норме

$$\|\theta\|_{\ell_{1,r}} = \sum_{k=0}^{\infty} r^k \, |\theta_k|.$$

Произвольному элементу $\theta \in \ell_{1,r}$ можно сопоставить определённую на круге $\{w \,|\, |w| < r\}$ аналитическую функцию Θ вида

$$\Theta(w) = \sum_{k=0}^{\infty} \theta_k w^k.$$

В дальнейшем Θ будет называться *производящей функцией* вектора θ.

Лемма 2.1. *Пусть фиксированы произвольные $r < 1$ и $R > 1$. Пусть также набор неотрицательных чисел $\{u_k\}_{k=1}^N$ таков, что*

$$\sum_{k=1}^{N} u_k = 1,$$

причём наибольший общий делитель номеров k, для которых справедливо неравенство $u_k > 0$, равен 1. Тогда для любого $x \in \ell_{1,R}$ существует и единственно решение $z \in \ell_{1,r}$ системы

$$\forall n \in \{0, 1, 2, \ldots\} \qquad z_n = x_n + \sum_{k=1}^{\min(N,n)} u_k z_{n-k}.$$

При этом координаты вектора z удовлетворяют оценке

$$\forall n \in \{0, 1, 2, \ldots\} \qquad \left| z_n - \frac{\omega}{J} \right| \leqslant \|x\|_{\ell_{1,R}} \cdot C_n,$$

где бесконечно малая последовательность $\{C_k\}_{k=0}^{\infty}$ не зависит от выбора x, а величины ω и J определены равенствами

$$\omega = \sum_{k=0}^{\infty} x_k$$

и

$$J = \sum_{k=1}^{N} k u_k.$$

Для доказательства леммы 2.1 достаточно воспроизвести, с незначительными изменениями, рассуждения из доказательства леммы [**6**, Lemma A.1].

Лемма 2.2. *Пусть фиксированы произвольные $r < 1$ и $R > 1$. Пусть наборы неотрицательных чисел $\{u_k\}_{k=1}^N$ и $\{v_k\}_{k=1}^N$ таковы, что*

$$\sum_{k=1}^{N} (u_k + v_k) = 1, \qquad \sum_{k=1}^{N} v_k > 0,$$

причём наибольший общий делитель номеров k, для которых справедливо неравенство $u_k + v_k > 0$, равен 1. Пусть также найдётся либо нечётное $k \leqslant N$ со свойством $u_k > 0$, либо чётное $k \leqslant N$ со свойством $v_k > 0$. Тогда для любых $x_j \in \ell_{1,R}$, где $j = 1, 2$, существует и единственна пара $z_j \in \ell_{1,r}$ решений системы

$$\forall n \in \{0, 1, 2, \ldots\} \qquad z_{j,n} = x_{j,n} + \sum_{k=1}^{\min(N,n)} (u_k z_{j,n-k} + v_k z_{3-j,n-k}), \qquad j = 1, 2.$$

При этом координаты векторов z_j, где $j = 1, 2$, удовлетворяют оценке

$$\forall n \in \{0, 1, 2, \dots\} \qquad \left| z_{j,n} - \frac{\omega}{J} \right| \leqslant (\|x_1\|_{\ell_{1,R}} + \|x_2\|_{\ell_{1,R}}) \cdot C_n, \qquad j = 1, 2, \tag{2.1}$$

где бесконечно малая последовательность $\{C_k\}_{k=0}^{\infty}$ не зависит от выбора x_j, а величины ω и J определены равенствами

$$\omega = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (x_{1,k} + x_{2,k}) \tag{2.2}$$

и

$$J = \sum_{k=1}^{N} k(u_k + v_k). \tag{2.3}$$

Доказательство. *Шаг 1.* Обозначим через U и V многочлены

$$U(w) = \sum_{k=1}^{N} u_k w^k,$$
$$V(w) = \sum_{k=1}^{N} v_k w^k.$$

Из условий леммы вытекает, что многочлен $1 - U - V$ имеет в круге $\{w \mid |w| \leqslant 1\}$ единственный, причём простой, нуль $w = 1$. Тем самым рассматриваемый многочлен может быть представлен в виде $(1 - w) \cdot Q(w)$, где Q есть многочлен вида

$$Q(w) = \sum_{n=0}^{N-1} \left(\sum_{k=n+1}^{N} (u_k + v_k) \right) w^n.$$

В свою очередь, Q может быть представлен в виде $(1 - w) \cdot P(w) + J$, где P есть некоторый многочлен, а постоянная $J = Q(1)$ определена равенством (2.3).

Из условий леммы вытекает также, что при любом w, удовлетворяющем неравенству $|w| \leqslant 1$, справедливо неравенство

$$|U(w) - V(w)| < 1.$$

Объединяя этот факт со сказанным ранее, получаем, что при некотором $\hat{R} \in (1, R)$ круг $\{w \mid |w| < \hat{R}\}$ свободен от нулей многочленов Q и $1 - U + V$.

Шаг 2. Производящие функции X_j и Z_j, где $j = 1, 2$, векторов x_j и z_j должны подчиняться равенствам

$$Z_j = X_j + UZ_j + VZ_{3-j}, \qquad j = 1, 2,$$

из которых немедленно вытекают равенства

$$Z_j = \frac{X_1 + X_2}{2(1 - U - V)} + \frac{X_j - X_{3-j}}{2(1 - U + V)}, \qquad j = 1, 2. \tag{2.4}$$

Последние равенства доказывают факт существования и единственности пары решений z_j, где $j = 1, 2$.

Далее, равенства (2.4) означают, что при любом w из области определения функций Z_j справедливы равенства

$$Z_j(w) = \frac{X_1(1)+X_2(1)}{2J(1-w)} + \left[\frac{(X_1(w)-X_1(1))+(X_2(w)-X_2(1))}{2J(1-w)} - \right.$$
$$\left. -\frac{P(w)\cdot(X_1(w)+X_2(w))}{2JQ(w)} + \frac{X_j(w)-X_{3-j}(w)}{2(1-U(w)+V(w))}\right].$$

Слагаемое из правой части, заключённое в квадратные скобки, представляет собой аналитическую функцию в круге $\{w \,\big|\, |w| < \hat{R}\}$. Применяя к этой функции неравенства Коши, убеждаемся, что её коэффициенты Маклорена c_k, где $k = 0, 1, 2, \ldots$, удовлетворяют оценке

$$\forall k \in \{0,1,2,\ldots\} \qquad |c_k| \leqslant C_k(\|x_1\|_{\ell_{1,R}} + \|x_2\|_{\ell_{1,R}}),$$

где бесконечно малая последовательность $\{C_k\}_{k=0}^{\infty}$ не зависит от выбора x_j. Поскольку коэффициенты Маклорена функции

$$\frac{X_1(1)+X_2(1)}{2J(1-w)}$$

тождественно равны ω/J, где постоянная ω определена равенством (2.2), то тем самым неравенства (2.1) справедливы. Лемма доказана. □

Леммы 2.1 и 2.2 позволяют доказать следующие теоремы восстановления с оценкой остатка.

Теорема 2.1. *Пусть фиксировано произвольное положительное вещественное число τ. Пусть также набор неотрицательных чисел $\{u_k\}_{k=1}^N$ таков, что*

$$\sum_{k=1}^{N} u_k = 1,$$

причём наибольший общий делитель номеров k, для которых справедливо неравенство $u_k > 0$, равен 1. Наконец, пусть непрерывная на $\mathbb{R}$ функция X удовлетворяет условиям

$$\forall t \in \mathbb{R}^+ \qquad |X(t)| \leqslant \Pi\, e^{-\tau t},$$
$$\forall t \in \mathbb{R}^- \qquad X(t) = 0,$$

где $\Pi > 0$. Тогда существует и единственна непрерывная на $\mathbb{R}$ функция Z, удовлетворяющая уравнениям

$$\forall t \in \mathbb{R}^+ \qquad Z(t) = X(t) + \sum_{k=1}^{N} u_k\, Z(t-k),$$
$$\forall t \in \mathbb{R}^- \qquad Z(t) = 0.$$

При этом для функции Z справедлива оценка

$$\forall t \in \mathbb{R}^+ \qquad |Z(t) - s(t)| \leqslant \Pi \cdot C(t),$$

где исчезающая на бесконечности функция C не зависит от выбора функции X, а непрерывная 1-периодическая функция s имеет вид

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad s(t) = \frac{1}{J} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(t-k).$$

Через J здесь обозначена величина

$$J = \sum_{k=1}^{N} k\, u_k.$$

Теорема 2.2. *Пусть фиксировано произвольное положительное вещественное число τ. Пусть наборы неотрицательных чисел $\{u_k\}_{k=1}^N$ и $\{v_k\}_{k=1}^N$ таковы, что*

$$\sum_{k=1}^{N}(u_k + v_k) = 1, \qquad \sum_{k=1}^{N} v_k > 0,$$

причём наибольший общий делитель номеров k, для которых справедливо неравенство $u_k + v_k > 0$, равен 1. Пусть также найдётся либо нечётное $k \leqslant N$ со свойством $u_k > 0$, либо чётное $k \leqslant N$ со свойством $v_k > 0$. Наконец, пусть непрерывные на $\mathbb{R}$ функции X_j, где $j = 1, 2$, удовлетворяют условиям

$$\forall t \in \mathbb{R}^+ \qquad |X_j(t)| \leqslant \Pi_j\, e^{-\tau t},$$
$$\forall t \in \mathbb{R}^- \qquad X_j(t) = 0.$$

Здесь Π_j, где $j = 1, 2$, — положительные числа. Тогда существует и единственна пара непрерывных на $\mathbb{R}$ функций Z_j, где $j = 1, 2$, удовлетворяющая уравнениям

$$\forall t \in \mathbb{R}^+ \qquad Z_j(t) = X_j(t) + \sum_{k=1}^{N}(u_k\, Z_j(t-k) + v_k\, Z_{3-j}(t-k)),$$
$$\forall t \in \mathbb{R}^- \qquad Z_j(t) = 0.$$

При этом для функций Z_j, где $j = 1, 2$, справедливы оценки

$$\forall t \in \mathbb{R}^+ \qquad |Z_j(t) - s(t)| \leqslant (\Pi_1 + \Pi_2) \cdot C(t),$$

где исчезающая на бесконечности функция C не зависит от выбора функций X_j, где $j = 1, 2$, а непрерывная 1-периодическая функция s имеет вид

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad s(t) = \frac{1}{2J} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(X_1(t-k) + X_2(t-k)\right).$$

Через J здесь обозначена величина

$$J = \sum_{k=1}^{N} k\,(u_k + v_k).$$

Доказательство теоремы 2.2. Зафиксируем произвольное $R \in (1, e^{\tau})$. Тогда при любом $t \in [0, 1)$ последовательности $x_j(t) = \{x_{j,k}(t)\}_{k=0}^{\infty}$, где $j = 1, 2$, вида

$$\forall k \in \{0, 1, 2, \ldots\} \qquad x_{j,k}(t) = X_j(t+k), \qquad j = 1, 2,$$

принадлежат пространству $\ell_{1,R}$. При этом равномерно по $t \in [0, 1)$ справедливы оценки

$$\|x_j(t)\|_{\ell_{1,R}} \leqslant \frac{\Pi_j}{1 - Re^{-\tau}}, \qquad j = 1, 2.$$

Пусть теперь $\{C_k\}_{k=0}^{\infty}$ — последовательность из леммы 2.2. Зафиксируем исчезающую на бесконечности непрерывную функцию C, удовлетворяющую условию

$$\forall t \in \mathbb{R}^+ \qquad C(t) > \frac{C_{[t]}}{1 - Re^{-\tau}},$$

где через $[t]$ обозначена целая часть числа t. Утверждение теоремы теперь легко получается в результате применения леммы 2.2 к последовательностям $z_j(t) = \{z_{j,k}(t)\}_{k=0}^{\infty}$, где $j = 1, 2$, вида

$$\forall k \in \{0, 1, 2, \ldots\} \qquad z_{j,k}(t) = Z_j(t + k),$$

где $t \in [0, 1)$. □

Теорема 2.1 доказывается аналогично теореме 2.2 с тем отличием, что вместо леммы 2.2 используется лемма 2.1.

3. Самоподобные функции в пространстве $L_2[0,1]$

3.1. Операторы подобия в пространстве $L_2[0,1]$. Пусть фиксировано натуральное число $n > 1$, и пусть вещественные числа $a_k > 0$, d_k и β_k, где $k = 1, \ldots, n$, таковы, что

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = 1.$$

Данному набору чисел можно поставить в соответствие непрерывный нелинейный оператор $G : L_2[0,1] \to L_2[0,1]$ вида

$$G(f) = \sum_{k=1}^{n} \left\{ \beta_k \cdot \chi_{(\alpha_k, \alpha_{k+1})} + d_k \cdot G_k(f) \right\}, \tag{3.1}$$

где использованы следующие обозначения:

(1) через α_k, где $k = 1, 2, \ldots, n+1$, обозначены числа $\alpha_1 = 0$ и $\alpha_k = \sum_{l=1}^{k-1} a_l$, где $k = 2, \ldots, n+1$;
(2) через χ_Γ, где Γ — интервал, обозначена характеристическая функция интервала Γ, рассматриваемая как элемент пространства $L_2[0,1]$;
(3) через G_k, где $k = 1, \ldots, n$, обозначены непрерывные линейные операторы в пространстве $L_2[0,1]$, действующие на характеристическую функцию $\chi_{(\zeta,\xi)}$ произвольного интервала $(\zeta, \xi) \subset [0,1]$ согласно правилу

$$G_k(\chi_{(\zeta,\xi)}) = \chi_{(\alpha_k + a_k\zeta, \alpha_k + a_k\xi)}, \qquad k = 1, \ldots, n. \tag{3.2}$$

Это правило, как нетрудно видеть, определяет операторы G_k однозначно.

Операторы G вида (3.1) будут называться *операторами подобия*.

Лемма 3.1. *Оператор подобия G является сжимающим в том и только том случае, когда справедливо неравенство*

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \, |d_k|^2 < 1. \tag{3.3}$$

Доказательство. Утверждение доказываемой леммы следует из того факта, что при любых $f_1, f_2 \in L_2[0,1]$ справедливы соотношения

$$\|G(f_1) - G(f_2)\|^2_{L_2[0,1]} = \int\limits_0^1 |G(f_1) - G(f_2)|^2\, dx =$$

$$= \sum_{k=1}^n \left(|d_k|^2 \int\limits_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}} |G_k(f_1) - G_k(f_2)|^2\, dx \right) = \left(\sum_{k=1}^n a_k\, |d_k|^2 \right) \int\limits_0^1 |f_1 - f_2|^2\, dx =$$

$$= \left(\sum_{k=1}^n a_k\, |d_k|^2 \right) \|f_1 - f_2\|^2_{L_2[0,1]}.$$

□

Из леммы 3.1 и принципа сжимающих отображений немедленно вытекает справедливость следующего утверждения.

Теорема 3.1. *Если справедливо неравенство* (3.3), *то существует и единственна функция* $f \in L_2[0,1]$, *удовлетворяющая уравнению* $G(f) = f$.

В дальнейшем всегда будет предполагаться, что неравенство (3.3) выполнено.

3.2. Самоподобные функции и их типы. Если функция $f \in L_2[0,1]$ удовлетворяет уравнению $G(f) = f$, где G — некоторый оператор подобия, то такая функция будет называться *самоподобной*. При этом величины n, a_k, d_k и β_k, где $k = 1, 2, \ldots, n$, определяющие соответствующий оператор подобия G, будут называться *параметрами самоподобия* функции f.

Замечание 3.1. *Различные операторы подобия могут определять одну и ту же самоподобную функцию. В качестве примера можно привести функцию f вида $f(x) = x$, обладающую, в частности, параметрами самоподобия*

(1) $n = 2$, $a_1 = a_2 = d_1 = d_2 = 1/2$, $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = 1/2$;
(2) $n = 2$, $a_1 = d_1 = (3 - \sqrt{5})/2$, $a_2 = d_2 = (\sqrt{5} - 1)/2$, $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = (3 - \sqrt{5})/2$;
(3) $n = 2$, $a_1 = d_1 = 1/3$, $a_2 = d_2 = 2/3$, $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = 1/3$.

Функция $f \in L_2[0,1]$, для которой найдутся такие параметры самоподобия, что при некотором $\nu > 0$ будет справедливо условие

$$\forall k \in \{1, \ldots, n\}\ \exists l_k \in \mathbb{N} \qquad (a_k\, |d_k|) \cdot (a_k\, |d_k| - e^{-l_k \nu}) = 0, \tag{3.4}$$

будет называться *арифметически самоподобной* функцией. Если для некоторых параметров самоподобия число $\hat{\nu}$ является максимальным среди чисел ν со свойством (3.4), то такое число $\hat{\nu}$ будет называться *шагом* самоподобия функции f.

Функция $f \in L_2[0,1]$, для которой найдутся такие параметры самоподобия, что при любом $\nu > 0$ условие (3.4) будет нарушено, будет называться *неарифметически самоподобной* функцией.

Замечание 3.2. *Одна и та же функция может иметь различные шаги самоподобия, и даже может быть арифметически и неарифметически самоподобной одновременно. Например, упоминавшиеся в замечании 3.1 наборы параметров самоподобия для функции f вида $f(x) = x$ показывают, что эта функция:*

(1) *арифметически самоподобна с шагом* $\ln 4$*;*
(2) *арифметически самоподобна с шагом* $\ln 2 - \ln(3-\sqrt{5})$*;*
(3) *неарифметически самоподобна.*

3.3. Спектральный порядок. Особое место среди самоподобных функций занимают функции, для которых существуют параметры самоподобия со следующими свойствами:

(1) среди чисел d_k, где $k = 1, \ldots, n$, не менее двух отличны от нуля;
(2) среди чисел β_k, где $k = 1, \ldots, n$, по меньшей мере одно отлично от нуля.

Такие самоподобные функции будут называться *самоподобными функциями положительного спектрального порядка.*

Лемма 3.2. *Пусть f — самоподобная функция, и пусть n, a_k и d_k, где $k = 1, \ldots, n$, — её параметры самоподобия. Пусть при этом среди чисел d_k не менее двух отличны от нуля. Тогда существует и единственно положительное решение D уравнения*

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k\,|d_k|)^{D/2} = 1. \tag{3.5}$$

При этом $D < 2$.

Доказательство. Рассмотрим определённую на $(0, +\infty)$ функцию Υ вида

$$\forall x \in (0,+\infty) \qquad \Upsilon(x) = \sum_{k=1}^{n} (a_k\,|d_k|)^{x}\,.$$

Из легко получаемых на основе неравенства Коши–Буняковского соотношений

$$\sum_{k=1}^{n} a_k\,|d_k| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\,|d_k|^2\right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} a_k \cdot 1^2\right)^{1/2} = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\,|d_k|^2\right)^{1/2} < 1 \tag{3.6}$$

следует, что эта функция является убывающей, причём для любого $x \geqslant 1$ справедливо неравенство $\Upsilon(x) < 1$. С другой стороны, из условий леммы следует, что при $x \approx 0$ значения $\Upsilon(x)$ превосходят 1. Тем самым все утверждения леммы справедливы. $\square$

При помощи рассуждений, аналогичных тем, что будут ниже проделаны при доказательстве теоремы 4.2, можно установить справедливость следующего утверждения.

Теорема 3.2. *Пусть $f \in L_2[0,1]$ — самоподобная функция положительного спектрального порядка. Тогда решение D уравнения* (3.5) *не зависит от выбора параметров самоподобия.*

Решение D уравнения (3.5), отвечающего самоподобной функции положительного спектрального порядка, будет называться *спектральным порядком* этой функции. Спектральным порядком самоподобной функции, не являющейся самоподобной функцией положительного спектрального порядка, будет по определению считаться число 0.

4. Операторный пучок и его спектральные свойства

4.1. Построение операторной модели. В дальнейшем через $\mathcal{H}$ будет обозначаться пространство $\overset{\circ}{W}{}^1_2[0,1]$, снабжённое нормой

$$\forall y \in \overset{\circ}{W}{}^1_2[0,1] \qquad \|y\|_{\mathcal{H}} = \|y'\|_{L_2[0,1]}.$$

Через $\mathcal{H}' = \overset{\circ}{W}{}_2^{-1}[0,1]$ в дальнейшем будет обозначаться пространство, дуальное к $\mathcal{H}$ относительно $L_2[0,1]$, то есть пополнение пространства $L_2[0,1]$ по норме

$$\forall y \in L_2[0,1] \qquad \|y\|_{\mathcal{H}'} = \sup_{\|z\|_{\mathcal{H}}=1} |\langle y, z\rangle_{L_2[0,1]}|.$$

Через $\mathfrak{I}[y,z]$, где $y \in \mathcal{H}'$ и $z \in \mathcal{H}$, будет обозначаться полуторалинейная форма, являющаяся продолжением по непрерывности формы

$$\forall y \in L_2[0,1]\ \forall z \in \mathcal{H} \qquad \mathfrak{I}[y,z] = \int\limits_0^1 y\overline{z}\,dx.$$

Как несложно проверить, любой функции $P \in L_2[0,1]$ можно поставить в соответствие однозначно определённую функцию $\rho \in \mathcal{H}'$ со свойством

$$\forall y \in \mathcal{H} \qquad \mathfrak{I}[\rho, y] = -\int\limits_0^1 P\overline{y'}\,dx.$$

Такая функция ρ будет называться *производной* от функции P. Легко проследить связь введённого определения с известным в теории обобщённых функций понятием обобщённой производной.

В соответствии с мультипликаторной трактовкой задач Штурма–Лиувилля с сингулярными потенциалами (см., например, [**4**]), выберем в качестве операторной модели для задачи (1.1), (1.2) линейный пучок $T_\rho : \mathcal{H} \to \mathcal{H}'$ ограниченных операторов, удовлетворяющий тождеству

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}\ \forall y, z \in \mathcal{H} \qquad \mathfrak{I}[T_\rho(\lambda)y, z] = \int\limits_0^1 y'\overline{z'}\,dx - \lambda \cdot \mathfrak{I}[\rho, \overline{y}z],$$

В случае, когда вес ρ представляет собой производную функции $P \in L_2[0,1]$, последнее тождество переписывается в виде

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}\ \forall y, z \in \mathcal{H} \qquad \mathfrak{I}[T_\rho(\lambda)y, z] = \int\limits_0^1 \left\{y'\overline{z'} + \lambda P \cdot (y'\overline{z} + y\overline{z'})\right\} dx. \tag{4.1}$$

Несложно убедиться, что в регулярном случае $\rho \in C[0,1]$ уравнение $T_\rho(\lambda)y = 0$ эквивалентно задаче (1.1), (1.2), понимаемой обычным образом. Очевидна также справедливость тождества

$$\forall y \in \mathcal{H} \qquad \mathfrak{I}[T_\rho(0)y, y] = \|y\|^2_{\mathcal{H}}. \tag{4.2}$$

Прежде чем сформулировать основной результат настоящего пункта, введём следующие понятия.

- *Индексом инерции* $\operatorname{ind} S$ оператора $S : \mathcal{H} \to \mathcal{H}'$ будет называться максимум размерностей подпространств $\mathcal{M} \subset \mathcal{H}$, удовлетворяющих условию

$$\exists \varepsilon > 0\ \forall y \in \mathcal{M} \quad \mathfrak{I}[Sy, y] \leqslant -\varepsilon \|y\|^2_{\mathcal{H}}.$$

- Собственное значение $\lambda \in \mathbb{C}$ линейного пучка $S : \mathcal{H} \to \mathcal{H}'$ вида $S(\lambda) = A - \lambda B$ будет называться *собственным значением положительного (отрицательного) типа*, если справедливо неравенство
$$\exists \varepsilon > 0\ \forall y \in \ker S(\lambda) \quad \Im[By, y] \geqslant \varepsilon \|y\|^2_{\mathcal{H}}$$
(соответственно,
$$\exists \varepsilon > 0\ \forall y \in \ker S(\lambda) \quad \Im[By, y] \leqslant -\varepsilon \|y\|^2_{\mathcal{H}}) .$$

Основной результат настоящего пункта состоит в следующем.

Теорема 4.1. *Спектр пучка T_ρ чисто дискретен, и все его собственные значения являются простыми.*

Все собственные значения пучка T_ρ, расположенные правее нуля, имеют положительный тип, а все собственные значения пучка T_ρ, расположенные левее нуля, имеют отрицательный тип. Для любого $\lambda > 0$ число собственных значений пучка T_ρ, принадлежащих интервалу $(0, \lambda)$, совпадает с индексом инерции $\operatorname{ind} T_\rho(\lambda)$ оператора $T_\rho(\lambda)$. Аналогично, для любого $\lambda < 0$ число собственных значений пучка T_ρ, принадлежащих интервалу $(\lambda, 0)$, совпадает с индексом инерции $\operatorname{ind} T_\rho(\lambda)$ оператора $T_\rho(\lambda)$.

Доказательство. Производная T'_ρ пучка T_ρ представляет собой компактный оператор. Поэтому к пучку T_ρ могут быть приложены результаты работы [**5**].

Тождество (4.2) означает, что пучок T_ρ является сильно дефинизируемым (см. теорему [**5**, Theorem 1]). Утверждения теоремы вытекают потому из утверждения [**5**, Proposition 6], теоремы [**5**, Theorem 1], тождества (4.2) и простого свойства
$$\forall \lambda \in \mathbb{C} \qquad \dim \ker T_\rho(\lambda) \leqslant 1.$$
□

Теорема 4.1 показывает, что знание асимптотики при $\lambda \to \pm\infty$ для индекса инерции операторов $T_\rho(\lambda)$ эквивалентно знанию асимптотики при $\lambda \to \pm\infty$ для собственных значений пучка T_ρ. Поэтому получаемые ниже утверждения о поведении величины $\operatorname{ind} T_\rho(\lambda)$ легко могут быть переформулированы в утверждения о спектре пучка T_ρ.

4.2. Асимптотики спектра. Основным результатом настоящего пункта является следующее утверждение.

Теорема 4.2. *Пусть $P \in L_2[0, 1]$ — арифметически самоподобная функция с шагом ν, имеющая положительный спектральный порядок D. Пусть при этом найдётся номер $k \leqslant n$, для которого выполнено одно из следующих условий:*

- *Справедливо неравенство $d_k > 0$, и отношение*
$$\frac{\ln(a_k\,|d_k|)}{\nu} \tag{4.3}$$
нечётно.
- *Справедливо неравенство $d_k < 0$, и отношение (4.3) чётно.*

Тогда для пучка (4.1) справедливы следующие утверждения.

(1) *Существуют такие непрерывные неотрицательные 1-периодические функции $s_\pm$, что при $\lambda \to \pm\infty$ справедливы асимптотические представления*

$$\operatorname{ind} T_\rho(\lambda) = |\lambda|^{D/2} \left(s_\pm \left(\frac{\ln|\lambda|}{\nu} \right) + o(1) \right). \tag{4.4}$$

(2) *Если при некотором $k \in \{1, \ldots, n\}$ имеет место неравенство $d_k < 0$, то справедливо тождество*

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad s_+(t) = s_-(t). \tag{4.5}$$

(3) *Если для некоторой функции $y \in \mathcal{H}$ имеет место неравенство $\Im[\rho, |y|^2] > 0$, то функция s_+ положительна. Аналогично, если для некоторой функции $y \in \mathcal{H}$ имеет место неравенство $\Im[\rho, |y|^2] < 0$, то функция s_- положительна.*

Доказательство теоремы 4.2 будет опираться на следующую лемму.

Лемма 4.1. *Пусть функция $P \in L_2[0,1]$ самоподобна, и пусть n, a_k и d_k, где $k = 1, 2, \ldots, n$, — её параметры самоподобия. Тогда для пучка (4.1) справедливы неравенства*

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \qquad 0 \leqslant \operatorname{ind} T_\rho(\lambda) - \sum_{k=1}^{n} \operatorname{ind} T_\rho(a_k d_k \cdot \lambda) \leqslant n - 1. \tag{4.6}$$

Доказательство. Зафиксируем произвольное $\lambda \in \mathbb{R}$.

Шаг 1. Пусть $\mathcal{M}_k$, где $k = 1, 2, \ldots, n$ — произвольные подпространства в $\mathcal{H}$, удовлетворяющие при некотором $\varepsilon > 0$ условиям

$$\forall y \in \mathcal{M}_k \qquad \Im[T_\rho(a_k d_k \cdot \lambda) y, y] \leqslant -\varepsilon \|y\|^2_{\mathcal{H}}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Рассмотрим в $\mathcal{H}$ подпространство

$$\mathcal{M} = \bigoplus_{k=1}^{n} G_k(\mathcal{M}_k),$$

где G_k — операторы, определённые формулой (3.2). Размерность подпространства $\mathcal{M}$, очевидно, представляет собой сумму размерностей подпространств $\mathcal{M}_k$. С другой стороны, для любого набора функций $y_k \in \mathcal{M}_k$, где $k = 1, 2, \ldots, n$, и построенной по нему функции $y = \sum_{k=1}^{n} G_k(y_k) \in \mathcal{M}$ справедливы соотношения

$$\Im[T_\rho(\lambda) y, y] = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}} \left\{ |y'|^2 + \lambda P \cdot (y'\overline{y} + y\overline{y'}) \right\} dx =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{0}^{1} \left\{ a_k^{-1} |y_k'|^2 + d_k \cdot \lambda P \cdot (y_k' \overline{y_k} + y_k \overline{y_k'}) \right\} dx =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_k^{-1} \Im[T_\rho(a_k d_k \cdot \lambda) y_k, y_k] \leqslant -\varepsilon \sum_{k=1}^{n} a_k^{-1} \|y_k\|^2_{\mathcal{H}} = -\varepsilon \|y\|^2_{\mathcal{H}}.$$

Тем самым подпространство $\mathcal{M}$ удовлетворяет условию

$$\forall y \in \mathcal{M} \qquad \Im[T_\rho(\lambda) y, y] \leqslant -\varepsilon \|y\|^2_{\mathcal{H}}. \tag{4.7}$$

Ввиду произвольности выбора подпространств $\mathcal{M}_k$, сказанное означает справедливость левого неравенства в соотношении (4.6)

Шаг 2. Пусть $\mathcal{M}$ — подпространство в $\mathcal{H}$, удовлетворяющее при некотором $\varepsilon > 0$ условию (4.7). Пусть также $\mathcal{M}_k$, где $k = 1, 2, \ldots, n,$ — подпространства в $\mathcal{H}$, удовлетворяющие при некоторых $\varepsilon_k > 0$ условиям

$$\forall y \in \mathcal{M}_k \qquad \Im[T_\rho(a_k d_k \cdot \lambda)y, y] \leqslant -\varepsilon_k \|y\|^2_{\mathcal{H}}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{4.8}$$

Через $\mathcal{M}_k^\perp$ в дальнейшем будут обозначаться подпространства в $\mathcal{H}$ вида

$$\mathcal{M}_k^\perp = \{y \in \mathcal{H} \,\big|\, \forall z \in \mathcal{M}_k \quad \Im[T_\rho(a_k d_k \cdot \lambda)z, y] = 0\}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Предположим, что справедливо неравенство

$$\dim \mathcal{M} - \sum_{k=1}^n \dim \mathcal{M}_k > n - 1. \tag{4.9}$$

Поскольку подпространство

$$\tilde{\mathcal{M}} = \bigoplus_{k=1}^n G_k(\mathcal{M}_k^\perp)$$

имеет в $\mathcal{H}$ коразмерность $\sum_{k=1}^n \dim \mathcal{M}_k + n - 1$, то подпространство $\mathcal{M} \cap \tilde{\mathcal{M}}$ нетривиально. Следовательно, найдётся такой набор функций $y_k \in \mathcal{M}_k^\perp$, где $k = 1, 2, \ldots, n$, что для отвечающей ему функции $y = \sum_{k=1}^n G_k(y_k)$ будут справедливы соотношения

$$\sum_{k=1}^n a_k^{-1}\, \Im[T_\rho(a_k d_k \cdot \lambda)y_k, y_k] = \Im[T_\rho(\lambda)y, y] < 0.$$

Тем самым при некотором $m \in \{1, 2, \ldots, n\}$ будет справедливо неравенство $\Im[T_\rho(a_m d_m \cdot \lambda)y_m, y_m] < 0$. Но в этом случае, как легко проверить непосредственно, подпространство

$$\mathcal{M}'_m = \mathcal{M}_m \oplus \mathrm{Lin}\{y_m\}$$

будет удовлетворять условию

$$\forall y \in \mathcal{M}'_m \qquad \Im[T_\rho(a_m d_m \cdot \lambda)y, y] \leqslant -\varepsilon'_m \|y\|^2_{\mathcal{H}}$$

при некотором $\varepsilon'_m > 0$.

Сказанное означает, что, отправляясь от набора подпространств $\mathcal{M}_k$, где $k = 1, 2, \ldots, n$, удовлетворяющего условиям (4.8) и (4.9), всегда можно построить набор подпространств $\mathcal{M}'_k$, где $k = 1, 2, \ldots, n$, удовлетворяющий при некоторых $\varepsilon'_k > 0$ условиям

$$\forall y \in \mathcal{M}'_k \qquad \Im[T_\rho(a_k d_k \cdot \lambda)y, y] \leqslant -\varepsilon'_k \|y\|^2_{\mathcal{H}}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n,$$

а также условию

$$\sum_{k=1}^n \dim \mathcal{M}'_k > \sum_{k=1}^n \dim \mathcal{M}_k.$$

Отсюда автоматически вытекает справедливость правого неравенства в соотношении (4.6). Лемма полностью доказана. $\square$

Утверждение леммы 4.1 представляет собой обобщение формулы (18) из работы [**3**].

Доказательство теоремы 4.2. *Шаг 1.* Введём в рассмотрение непрерывные функции $\Lambda_{\pm,\varepsilon}$ вида

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \Lambda_{\pm,\varepsilon}(t) = e^{-D\nu t/2}\,\varepsilon^{-1}\int\limits_t^{t+\varepsilon} \operatorname{ind} T_\rho\left(\pm e^{\nu\zeta}\right)\,d\zeta. \tag{4.10}$$

Здесь ε — произвольная положительная постоянная. Из леммы 4.1 следует, что имеют место неравенства

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \Bigg|\Lambda_{\pm,\varepsilon}(t) - \sum_{d_k>0}(a_k\,|d_k|)^{D/2}\Lambda_{\pm,\varepsilon}(t-l_k) - \\ - \sum_{d_k<0}(a_k\,|d_k|)^{D/2}\Lambda_{\mp,\varepsilon}(t-l_k)\Bigg| \leqslant e^{-D\nu t/2}\cdot(n-1), \tag{4.11}$$

где числа l_k определены соотношением (3.4). Кроме того, с очевидностью найдутся такие $t_0 \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon_0 > 0$, что будут справедливы тождества

$$\forall \varepsilon \in (0,\varepsilon_0)\ \forall t \leqslant t_0 \qquad \Lambda_{\pm,\varepsilon}(t) = 0.$$

Применяя теперь теоремы 2.1 и 2.2 к функциям $\tilde{\Lambda}_{\pm,\varepsilon}$ вида

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \tilde{\Lambda}_{\pm,\varepsilon}(t) = \Lambda_{\pm,\varepsilon}(t-t_0),$$

находим, что при $t \to +\infty$ функции $\Lambda_{\pm,\varepsilon}$ равномерно по $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$ стремятся к непрерывным 1-периодическим функциям $s_{\pm,\varepsilon}$. При этом в случае, когда среди коэффициентов d_k имеются отрицательные, справедливо тождество

$$\forall \varepsilon \in (0,\varepsilon_0)\ \forall t \in \mathbb{R} \qquad s_{+,\varepsilon}(t) = s_{-,\varepsilon}(t).$$

Шаг 2. Зафиксируем произвольное $\delta > 0$. Зафиксируем также такое натуральное число N, что $e^{-D\nu N/2} < \delta/4$ и

$$\forall \varepsilon \in (0,\varepsilon_0)\ \forall t \in [N, N+1) \qquad |\Lambda_{\pm,\varepsilon}(t) - s_{\pm,\varepsilon}(t)| < \delta/4. \tag{4.12}$$

Из теоремы 4.1 следует, что для некоторого $\varepsilon_1 \in (0,\varepsilon_0)$ будут справедливы неравенства

$$\forall \varepsilon \in (0,\varepsilon_1)\ \forall t \in [N, N+1) \qquad |e^{D\nu t/2}\Lambda_{\pm,\varepsilon}(t) - \operatorname{ind} T_\rho(\pm e^{\nu t})| \leqslant 1.$$

Отсюда немедленно вытекают неравенства

$$\forall \varepsilon, \varepsilon' \in (0,\varepsilon_1)\ \forall t \in [N, N+1) \qquad |\Lambda_{\pm,\varepsilon}(t) - \Lambda_{\pm,\varepsilon'}(t)| < \delta/2,$$

объединяя которые с неравенствами (4.12), убеждаемся в справедливости неравенств

$$\forall \varepsilon, \varepsilon' \in (0,\varepsilon_1)\ \forall t \in [N, N+1) \qquad |s_{\pm,\varepsilon}(t) - s_{\pm,\varepsilon'}(t)| < \delta.$$

Суммируя сказанное, получаем, что при $\varepsilon \searrow 0$ функции $s_{\pm,\varepsilon}$ равномерно на $\mathbb{R}$ сходятся к некоторым 1-периодическим функциям $s_\pm$, для которых справедливы асимптотики (4.4). При этом в случае, когда среди величин d_k имеются отрицательные, справедливо тождество (4.5). Тем самым справедливость первых двух утверждений теоремы доказана.

Шаг 3. Для завершения доказательства теоремы остаётся показать справедливость её утверждения (3). Мы ограничимся рассмотрением случая с функцией s_+ (случай с функцией s_- рассматривается аналогично).

На данном шаге будет предполагаться, что все коэффициенты d_k неотрицательны.

Пусть при некотором $y \in \mathcal{H}$ справедливо неравенство $\Im[\rho, |y|^2] > 0$. Тогда, согласно определению пучка T_ρ, при $\lambda \gg 0$ будет справедливо неравенство $\operatorname{ind} T_\rho(\lambda) > 0$. Согласно теореме 4.1, это означает наличие собственных значений пучка T_ρ на положительной полупрямой.

Обозначим через λ_1 наименьшее положительное собственное значение пучка T_ρ. Тогда при любом достаточно малом $\varepsilon > 0$ на полуинтервале $t \in [\ln \lambda_1/\nu, \ln \lambda_1/\nu + 1 - \varepsilon)$ будет выполняться неравенство

$$\Lambda_{+,\varepsilon}(t) - \sum_{d_k>0} (a_k\,|d_k|)^{D/2} \Lambda_{+,\varepsilon}(t - l_k) \geqslant e^{-D\nu/2}\,\lambda_1^{-1}.$$

Согласно теореме 2.1 и лемме 4.1 это означает, что функция s_+ должна подчиняться неравенству

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad s_+(t) \geqslant \frac{e^{-D\nu/2}}{J\lambda_1},$$

где положено

$$J = \sum_{d_k \neq 0} l_k\,(a_k\,|d_k|)^{D/2}. \tag{4.13}$$

Следовательно, в рассматриваемом случае функция s_+ положительна.

Шаг 4. Пусть теперь среди величин d_k имеются отрицательные. Обозначим через λ_1 наименьшую из абсолютных величин собственных значений пучка T_ρ. Тогда при любом достаточно малом $\varepsilon > 0$ на полуинтервале $t \in [\ln \lambda_1/\nu, \ln \lambda_1/\nu + 1 - \varepsilon)$ будет выполняться по меньшей мере одно из двух неравенств

$$\Lambda_{\pm,\varepsilon}(t) - \sum_{d_k>0} (a_k\,|d_k|)^{D/2} \Lambda_{\pm,\varepsilon}(t - l_k) - \sum_{d_k<0} (a_k\,|d_k|)^{D/2} \Lambda_{\mp,\varepsilon}(t - l_k) \geqslant e^{-D\nu/2}\,\lambda_1^{-1}.$$

Согласно теореме 2.2 и лемме 4.1 это означает, что функция s_+ должна подчиняться неравенству

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad s_+(t) \geqslant \frac{e^{-D\nu/2}}{2J\lambda_1},$$

где величина J определена соотношением (4.13). Следовательно, в рассматриваемом случае функция s_+ также положительна. Тем самым третье утверждение теоремы справедливо.

Теорема полностью доказана. □

5. Примеры

5.1. Некоторые конкретные весовые функции. В дальнейшем через $P_{a,\delta}$, где $a \in (0, 1/2)$ и $\delta \in [0, 1/3)$, будет обозначаться квадратично суммируемая самоподобная функция вида

$$n = 3, \quad a_1 = a_2 = a, \quad a_2 = 1 - 2a,$$
$$d_1 = d_3 = 1/2 + \delta, \quad d_2 = -2\delta, \quad \beta_1 = 0, \quad \beta_2 = 1/2 + \delta, \quad \beta_3 = 1/2 - \delta.$$

В частности, $P_{1/3,0}$ представляет собой хорошо известную канторову лестницу.

Кроме того, через $\tilde{P}_a$, где $a \in (0, 1/3)$, будет обозначаться функция $P_{a,\delta}$, для которой значение параметра δ определено условием $(2 - 5a)\,\delta = a/2$.

n	λ_n	$n/\lambda_n^{\log_6 2}$
1	$1,44 \cdot 10^1 \pm 1\%$	0,356 $\pm$ 0,001
2	$3,53 \cdot 10^1 \pm 1\%$	0,504 $\pm$ 0,001
3	$1,41 \cdot 10^2 \pm 1\%$	0,442 $\pm$ 0,001
4	$1,51 \cdot 10^2 \pm 1\%$	0,574 $\pm$ 0,001
5	$3,26 \cdot 10^2 \pm 1\%$	0,533 $\pm$ 0,001
6	$3,53 \cdot 10^2 \pm 1\%$	0,620 $\pm$ 0,001
7	$8,76 \cdot 10^2 \pm 1\%$	0,509 $\pm$ 0,001
8	$8,76 \cdot 10^2 \pm 1\%$	0,582 $\pm$ 0,001
9	$1,58 \cdot 10^3 \pm 1\%$	0,521 $\pm$ 0,001
10	$1,62 \cdot 10^3 \pm 1\%$	0,573 $\pm$ 0,001

n	λ_n	$n/\lambda_n^{\log_6 2}$
11	$2,03 \cdot 10^3 \pm 1\%$	0,578 $\pm$ 0,001
12	$2,03 \cdot 10^3 \pm 1\%$	0,630 $\pm$ 0,001
13	$2,27 \cdot 10^3 \pm 1\%$	0,654 $\pm$ 0,001
14	$2,29 \cdot 10^3 \pm 1\%$	0,702 $\pm$ 0,001
15	$5,26 \cdot 10^3 \pm 1\%$	0,545 $\pm$ 0,001
16	$5,26 \cdot 10^3 \pm 1\%$	0,582 $\pm$ 0,001
17	$9,23 \cdot 10^3 \pm 1\%$	0,497 $\pm$ 0,001
18	$9,27 \cdot 10^3 \pm 1\%$	0,525 $\pm$ 0,001
19	$9,59 \cdot 10^3 \pm 1\%$	0,547 $\pm$ 0,001
20	$9,60 \cdot 10^3 \pm 1\%$	0,576 $\pm$ 0,001

Таблица 1. Оценки первых собственных значений для случая $a = 1/3$, $\delta = 0$

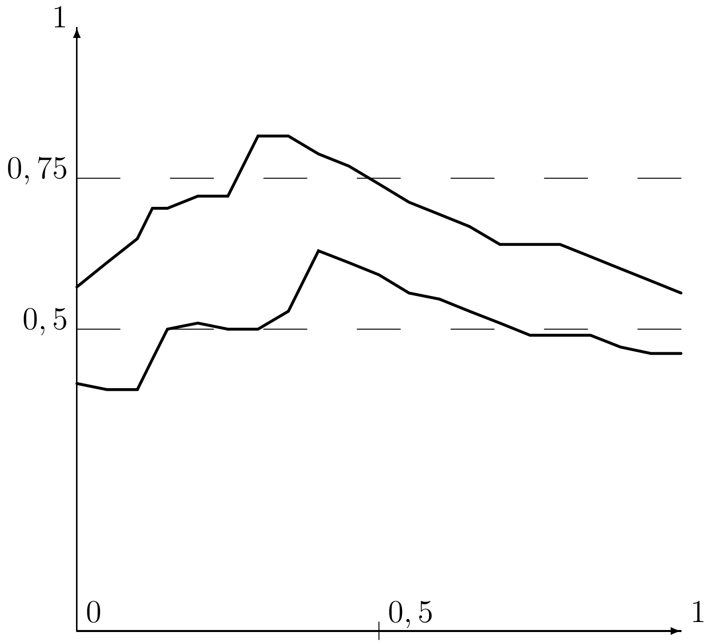

Рис. 1. Оценки функции s_+ для случая $a = 1/3$, $\delta = 0$

Утверждение 5.1. *Пусть D_a есть спектральный порядок функции $\tilde{P}_a$. Тогда при $a \nearrow 1/3$ справедлива асимптотика $D_a \nearrow 2$.*

Доказательство. В рассматриваемом случае имеет место соотношение

$$D_a = \frac{\ln 9}{\ln(2-5a) - \ln a - \ln(1-2a)}.$$

Подставляя сюда $a \nearrow 1/3$, получаем искомое утверждение. □

5.2. Численные результаты. В таблице 1 представлены результаты численных расчётов для первых двадцати собственных значений задачи Штурма–Лиувилля, весовой функцией в которой выступает производная функции $P_{1/3,0}$. Данные таблицы позволяют проиллюстрировать следующее из теоремы 4.2 утверждение $\lambda_n \asymp n^{\ln 6/\ln 2}$.

Как следует из соотношений (4.10) и (4.11), для функции $\rho = P'_{1/3,0}$ и любого положительного λ, не являющегося собственным значением пучка T_ρ, справедливы соотношения

$$\lambda^{-\log_6 2} \cdot (\operatorname{ind} T_\rho(\lambda) - 2) \leqslant s_+(\log_6 \lambda) \leqslant \lambda^{-\log_6 2} \cdot (\operatorname{ind} T_\rho(\lambda) + 2)\,. \tag{5.1}$$

Подставляя в эти соотношения данные таблицы 1, устанавливаем справедливость неравенств

$$s_+(\log_6 \lambda_{14} + 0) \geqslant 0,60, \qquad s_+(\log_6 \lambda_{17} + 0) \leqslant 0,56.$$

Тем самым для рассматриваемой весовой функции ρ функция s_+ не является постоянной. Грубые верхняя и нижняя оценки для графика этой функции s_+ представлены на рисунке 1.

Рассмотрим также функцию $\hat{P}$, для которой $\beta_2 = 2/5$, а прочие параметры самоподобия совпадают с таковыми для функции $P_{1/3,0}$. Вес $\hat{\rho} = \hat{P}'$ является индефинитным, но к нему не может быть применено утверждение (2) теоремы 4.2. Расчёты показывают, что имеют место равенства

$$\operatorname{ind} T_{\hat{\rho}}(10000) = 19, \qquad \operatorname{ind} T_{\hat{\rho}}(-10000) = 3.$$

Однако для функции $\rho = \hat{\rho}$ при любом положительном λ, не принадлежащем спектру T_ρ, справедливы соотношения (5.1), а при любом отрицательном λ, не принадлежащем спектру T_ρ, справедливы соотношения

$$|\lambda|^{-\log_6 2} \cdot (\operatorname{ind} T_\rho(\lambda) - 2) \leqslant s_-(\log_6 |\lambda|) \leqslant |\lambda|^{-\log_6 2} \cdot (\operatorname{ind} T_\rho(\lambda) + 2)\,.$$

Поэтому имеют место неравенства

$$s_+(\log_6 10000) \geqslant 0,48, \qquad s_-(\log_6 10000) \leqslant 0,15,$$

показывающие, что требование наличия отрицательного d_k существенно для справедливости утверждения (2) теоремы 4.2.

Благодарности: Авторы благодарят А. И. Назарова и А. А. Шкаликова за обсуждение работы и ценные замечания.

Список литературы

[1] B. Churgus, H. Langer. *A Krein space approach to symmetric ordinary differential operators with an indefinite weight function*//J. Diff. Equat., **79** (1989), № 1, pp. 31–61.

[2] И. С. Кац, М. Г. Крейн. *О спектральных функциях струны.* В кн.: Ф. Аткинсон. *Дискретные и непрерывные граничные задачи.* М., «Мир», 1968, стр. 648–733.

[3] M. Solomyak, E. Verbitsky. *On a spectral problem related to self-similar measures*//Bull. London Math. Soc., **27** (1995), pp. 242–248.

[4] А. М. Савчук, А. А. Шкаликов. *Операторы Штурма–Лиувилля с потенциалами-распределениями*//Труды Моск. матем. общества, **64** (2003), с. 159–212.

[5] P. Lancaster, A. Shkalikov, Qiang Ye. *Strongly definitizable linear pencils in Hilbert space*//Integr. Equat. Oper. Th., **17** (1993), pp. 338–360.

[6] M. Levitin, D. Vassiliev. *Spectral asymptotics, renewal theorem, and the Berry conjecture for a class of fractals*//Proc. Lond. Math. Soc., **72** (1996), pp. 188–214.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет

E-mail address: vladimi@mech.math.msu.su

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет

E-mail address: iasheip@mech.math.msu.su